Tutorato Analisi I – 08/11/23

Ancora su limiti di successioni e di funzioni

Esercizio 1 $\lim_{n\to+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$

Soluzione

$$\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\sin\frac{1}{n}} = e^{\log\left(\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\sin\frac{1}{n}}\right)} = e^{\underline{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\log\sin\frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\underbrace{\sin\frac{1}{n}}\right)\log\left(\underbrace{\sin\frac{1}{n}}\right)$$

Cambio di variabile $x = x(n) = \sin\frac{1}{n}$, $\lim_{n\to+\infty} x = 0$ "$=0^+$"

per ogni $n\geq 1$: $0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \pi \Rightarrow \sin\frac{1}{n} > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} x\log(x)$$

Cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$ $\quad (x\to 0^+ \Rightarrow y\to+\infty)$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\log(1/y)}{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(-\underbrace{\frac{\log y}{y}}_{\to 0}\right) = 0$$

Il risultato finale è: $e^{\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\log\left(\sin\frac{1}{n}\right)\right)} = e^0 = 1.$

Recap: f, g funzioni tali che $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ ESISTE ed è finito* e
f CONTINUA $\quad \lim_{y\to y_0} f(y)$ ESISTE

allora
$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)}$$

Nel nostro caso $f(x) = e^{x}$, $g(x) = \dots$

$$\lim_{x\to x_0} e^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

*[Vale anche nel caso $y_0 = \pm\infty$: $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y)$]

Esercizio 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x+x^3)+x}{\arctan(3x-x^5)-x}$$

Soluzione

Verifichiamo se è possibile applicare la regola di De L'Hôpital

- è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$
- $\begin{cases} f(x) = \sin(2x+x^3)+x \\ g(x) = \arctan(3x-x^5)-x \end{cases}$ sono funzioni derivabili

$f'(x)$ è la derivata di una composizione di funzioni

Recap: $a(x), b(x)$ derivabili

$$\frac{d}{dx} a(b(x)) = (a(b(x)))' = a'(b(x)) \cdot b'(x)$$

Recap derivate

- $(x^n)' = n\, x^{n-1}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $a \in \mathbb{R}$, $f(x)$ derivab. $\Rightarrow (a f(x))' = a (f(x))'$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$f'(x) = (\sin(2x+x^3))' + (x)' =$$

$a(x) = \sin(x)$, $b(x) = 2x+x^3$

$b'(x) = 2(x)' + 3x^{3-1} = 2+3x^2$

$$= a'(b(x))\, b'(x) + 1 =$$

$$= \cos(2x+x^3)(2+3x^2) + 1$$

$$g'(x) = \arctan'(3x-x^5)(3x-x^5)' - (x)' =$$

$$= \frac{1}{1+(3x-x^5)^2}(3-5x^4) - 1$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\overbrace{\cos(\overbrace{2x+x^3}^{0})}^{1}\,\overbrace{(2+3x^2)}^{2}}{\frac{3-\overbrace{5x^4}^{\to 0}}{1+\underbrace{(3x-x^5)^2}_{0}}-1} =$$

$g'(0) = 3-1 = 2$

$(g'(x) \neq 0$ in un intorno di $0)$

$$= \frac{1+1\cdot 2}{3-1} = \frac{3}{2} \quad \text{ESISTE}$$

De L'Hôpital $\Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{2}$

DERIVATE : RICHIAMI

Ricerca della tangente al grafico di $y=f(x)$ in un punto $(x_0, f(x_0))$

$$\begin{cases} y = x^3 - 2x + 7 \\ y = mx + q \end{cases}$$

impongo il passaggio per $(x_0, f(x_0))$ e risolvendo in x impongo che ci sia una soluzione «doppia» ($\Delta = 0$ nel caso $y = ax^2+bx+c$) ... in generale non si riesce a risolvere ...

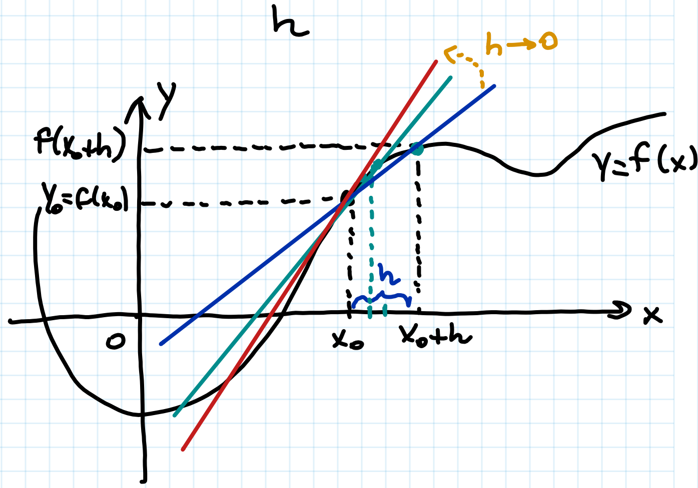
Se $h>0$, la retta per i punti $(x_0, f(x_0)), (x_0+h, f(x_0+h))$ ha equazione:

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h-x_0}(x-x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x-x_0)$$

La tangente in $(x_0, f(x_0))$, SE ESISTE,

è la retta

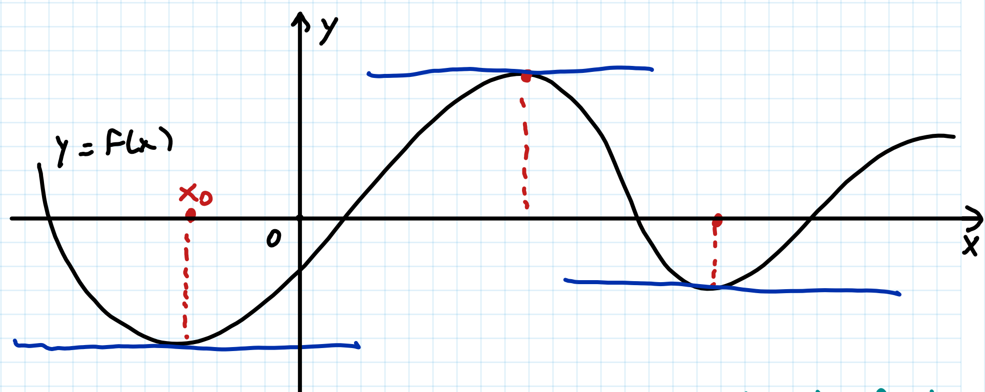
$$y - f(x_0) = \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)}(x-x_0)$$



$f'(x_0)$ è il coefficiente angolare

A che serve?

Tra le varie cose, ci permette di determinare punti di massimo e di minimo:



le rette orizzontali hanno coefficiente angolare 0

cioè esiste ed è FINITO il $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

x_0 punto di max/min di una funzione f DERIVABILE in x_0

$\Longrightarrow$ il $\underbrace{\text{coefficiente angolare della retta tangente}}_{f'(x_0)=0}$ al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$ è 0.

Calcolo delle Derivate: Esercizi di Base

Esercizio 1 Calcolare la derivata di $x^5 + 3x^4 + 2$

Soluzione

Ricordiamo che
$$\left.\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (\alpha f)' &= \alpha f', \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ costante} \end{aligned}\right\} \text{ linearità della derivata}$$

Ricordiamo che $(x^n)' = n\, x^{n-1}$, $\quad (\alpha)' = 0 \quad \alpha$ costante

$$(x^5 + 3x^4 + 2)' = (x^5)' + 3\underset{4x^3}{(x^4)} + \underset{0}{2'} =$$
$$= 5x^4 + 12x^3$$

Esercizio 2 Calcolare la derivata di $x^3 \cos x$

Soluzione

Ricordiamo che $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

$$(x^3 \cos x)' = (x^3)' \cos x + x^3 (\cos x)' =$$

Ricordiamo che $(\cos(x))' = -\sin x$

$$= 3x^2 \cos x + x^3(-\sin x).$$

Recap:

- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
- $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' \qquad \left[\ (f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)\ \right]$

Esercizio 3 Calcolare la derivata di $\dfrac{x^2-3x+7}{x^3-2}$

Soluzione

$$\left(\frac{x^2-3x+7}{x^3-2}\right)' = \frac{(x^2-3x+7)'(x^3-2)-(x^2-3x+7)(x^3-2)'}{(x^3-2)^2} =$$

$$= \frac{(2x-3)(x^3-2)-(x^2-3x+7)(3x^2)}{(x^3-2)^2} = \dots$$

Esercizio 4 Calcolare la derivata di $e^{x+1}\cdot\log x$

Soluzione

Ricordiamo che $(e^x)' = e^x$ $\quad [\,(a^x)' = a^x\log(a)\,]$

$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

$$\left(e^{x+1}\cdot\log(x)\right)' = (e^{x+1})'\cdot\log x + e^{x+1}(\log x)' =$$

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$$= f'(x+1)\cdot(x+1)'\log x + e^{x+1}\frac{1}{x} =$$

$$= e^{x+1}\cdot 1\cdot\log x + \frac{e^{x+1}}{x} =$$

$$= e^{x+1}\log x + \frac{e^{x+1}}{x}$$

NOTAZIONE: $\log(x) = \ln(x) = \log_e(x)$

[Quando la base è $b \neq e$ la scrivo sempre $\log_b(x)$.]

Esercizio 5 Calcolare la derivata di $(\sin x)^{\sin x}$

Soluzione

$$(\sin x)^{\sin x} = e^{\log((\sin x)^{\sin x})} = e^{\sin x \log(\sin x)}$$

$$\left(e^{g(x)}\right)' = e^{g(x)} \, g'(x)$$

basta porre $f(x) = e^x$ e applicare la regola della derivata della composizione
$(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$

$$\left(e^{\sin x \log(\sin x)}\right)' = e^{\sin x \log(\sin x)} \left(\sin x \log(\sin x)\right)'$$

Calcoliamo la derivata di $\sin x \log(\sin x) = g(x)$

$$g'(x) = (\sin x)' \log(\sin x) + \sin x \left(\log(\sin x)\right)' =$$

$$= \cos x \log(\sin x) + \cancel{\sin x} \underbrace{\frac{1}{\cancel{\sin x}} \cdot (\sin x)'}$$

$h(x) = \log(x)$

$h'(x) = \frac{1}{x}$

$(h(\sin x))' = h'(\sin x)\cdot(\sin x)'$
$= \frac{1}{\sin x}(\sin x)'$

$$= \cos x \log(\sin x) + \cos x =$$

$$= \cos x \left(\log(\sin x) + 1\right).$$

Dunque $$\left((\sin x)^{\sin x}\right)' = \underbrace{e^{\sin x \log(\sin x)}}_{(\sin x)^{\sin x}} \cdot \cos x \left(\log(\sin x) + 1\right).$$

STUDIO DI FUNZIONI

Esercizio Studiare la funzione $f(x) = \left| \arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right) \right|$

Soluzione (parziale)

1) DOMINIO: $x^2 - 9 \neq 0 \iff x \neq \pm 3$, $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$

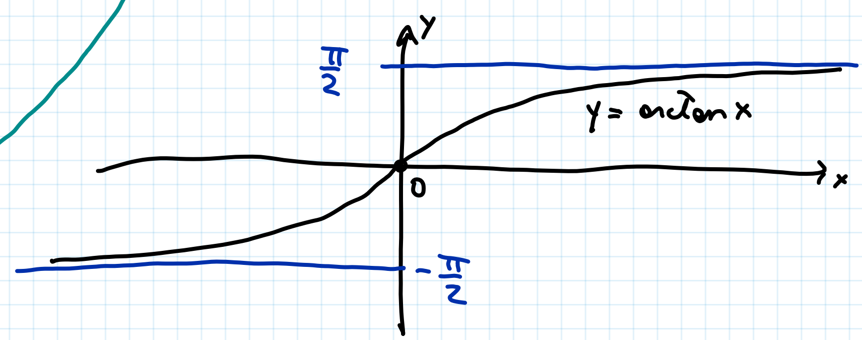
2) PARITÀ: $f(-x) = f(x)$, f è PARI: possiamo studiare $y = f(x)$ solo per $x \geq 0$. } il grafico per $x<0$ si ottiene simmetrizzando rispetto all'asse y

3) SEGNO: $f(x) = |\cdots| \Rightarrow f(x) \geq 0$ $(\forall x \in D)$.

$$f(x) = 0 \iff \arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right) = 0 \iff \frac{x^2-4}{x^2-9} = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2.$$

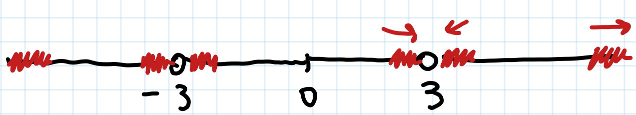
Ricordiamo il grafico della funzione $y = \arctan x$

$\arctan(F) = 0 \iff F = 0$



4) comportamento agli estremi del dominio D

$D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$



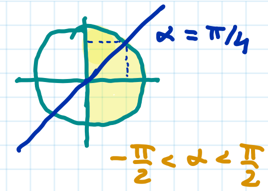
$-\infty$, -3 si ottengono per simmetria

f PARI $\Rightarrow$ basta studiare il caso $x \geq 0$, cioè $+\infty$, $+3$

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left|\arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right)\right| =$$ ← $\arctan x$ è continua

$$= \left|\arctan\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x^2-9}\right)\right| = |\arctan(1)| = \frac{\pi}{4} \; *$$

$*$ $\begin{cases} \tan\alpha = 1 \\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1 \iff \sin\alpha = \cos\alpha$



Quindi anche $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$ (per PARITÀ di f)

Quindi la retta $y = \frac{\pi}{4}$ è un asintoto orizzontale

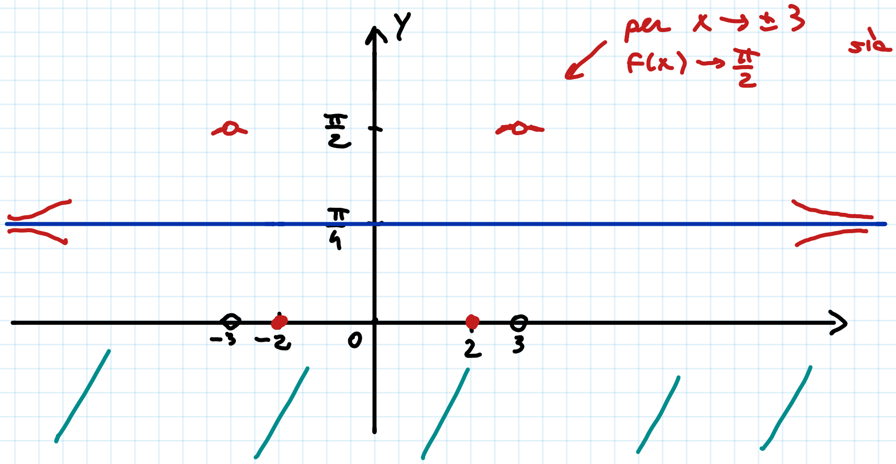
- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \left| \lim_{x \to 3^+} \arctan\left(\underbrace{\frac{\overbrace{x^2-4}^{\to 5}}{\underbrace{x^2-9}_{\to 0^+}}}_{\to +\infty} \right) \right| = \left| \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2}$

- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \left| \lim_{x \to 3^-} \arctan\left(\underbrace{\frac{\overbrace{x^2-4}^{\to 5}}{\underbrace{x^2-9}_{\to 0^-}}}_{\to -\infty} \right) \right| = \left| -\frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2}$

Simmetricamente per $x \to -3^{\pm}$.

4.1) Mettiamo insieme le informazioni che abbiamo trovato:

per $x \to \pm 3$ sia da destra che da sinistra
$f(x) \to \frac{\pi}{2}$



$y = \frac{\pi}{4}$ esintoto orizzontale

$f(0) = \left| \arctan\left(\frac{4}{9}\right) \right|$

5) Troviamo finalmente $\sup_D f$, $\min_D f$ $\quad$ [$\inf_D(f)$ significa: $\inf_{x \in D} f(x)$]

- $f(x) \geq 0$, $f(\pm 2) = 0 \implies \inf_D f = \min_D f = 0$.
- $f(x) < \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in D$, $\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{\pi}{2} \implies \sup_D f = \frac{\pi}{2}$.

in un intorno sx/dx di 3 (e di -3) $f(x)$ «si avvicina» sempre più a $\pi/2$.

(si può verificare con la definiz con ε, δ)

- f non ammette max:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \iff \arctan(\dots) = \frac{\pi}{2}, \text{ ma } \arctan(\dots) < \frac{\pi}{2} \text{ sempre.}$$

6) Derivata (max, min, crescenza, decrescenza)

Ricordare quando la funzione $g(x) = |x|$ è derivabile ...

Finiamo la prossima volta (Venerdì 10 Novembre)